

ISSN 0130-2221

Квант 4 1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



квант 4 1982

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР
ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:



Космическая весна человечества 2 Humanity's cosmic spring

Л. Понtryagin. Основная теорема алгебры 3 L. Pontryagin. The main theorem of algebra

А. Боровой. Год чудес 10 A. Borovoy. The year of miracles

На орбите — новый музей 18 A new museum on orbit

В. Фабрикант. Можно ли услышать рев мамонта? 20 V. Fabrikant. Can we hear the mammoth's roar?

Лаборатория «Кванта» Kvant's lab

М. Людомирский, А. Панфилов. Почему висит кольцо? 22 M. Liudomirski, A. Panfilov. Why does the ring stay hanging?

Задачник «Кванта» Kvant's problems

Задачи М736—М740; Ф748—Ф752 25 Problems M736—M740; P748—P752

Решения задач М696—М700; Ф708—Ф712 28 Solutions M696—M700; P708—P712

А. Зильберман. Два способа расчета 33 A. Zilberman. Two ways of calculating electric circuits

«Квант» для младших школьников Kvant for the younger school-children

Задачи 35 Problems

А. Калинин. Прически ежа 36 A. Kalinin. Combing a hedgehog

Практикум абитуриента College applicant's section

В. Рыжик. Надо ли искать ОДЗ? 39 V. Ryjik. Should one find the domain?

Варианты вступительных экзаменов в вузы College entrance exams

Ереванский государственный университет 43 Erevan state university

Московский институт стали и сплавов 44 Moscow institute of steel and alloys

Московский гидромелиоративный институт 45 Moscow hydromeliorative institute

Московский технологический институт пищевой промышленности 46 Moscow food industry technological institute

Мурманское высшее инженерное морское 47 Murmansk Lenin Komsomol higher naval engineering school

училище им. Ленинского комсомола Рижский институт инженеров гражданской 48 Riga Lenin Komsomol civil aviation

авиации им. Ленинского комсомола

Искусство программирования The art of programming

Заочная школа программирования. Урок 20 50 Computer programming correspondence school

Информация Information

Об итогах конкурса «Малый интеркосмос» 52 "Maly intercosmos" contest results

XIII конференция юных математиков 54 The 13th young mathematician's conference in Batumi

Заочная физическая школа 57 Physics correspondence school

Рецензии, библиография Book reviews

А. Зорич. Астрономия: наука и ее творцы 58 A. Zorich. Astronomy: science and creators

Ответы, указания, решения 60 Answers, hints, solutions

Новости науки (42) Science news (42)

Смесь (17, 49, 53, 59) Miscellaneous (17, 49, 53, 59)

Шахматная страница The chess page

Патовые рекорды (3-я с. обложки) Stalemate records (3rd cover page)



М. Людомирский,
А. Панфилов

Почему висит кольцо?

«Почему повисает алюминиевое кольцо, свободно надетое на незамкнутый сердечник трансформатора?» — такой вопрос был предложен участникам III Московского турнира юных физиков. Наверное, любой девятиклассник, не задумываясь, ответил бы примерно следующее: «В кольце индуцируются токи, которые взаимодействуют с внешним магнитным полем. Согласно правилу Ленца, индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим действием мешать причине, его породившей. В данном случае индукционные токи имеют такое направление, что сила Ампера как бы отталкивает кольцо от катушки трансформатора. В некотором положении эта сила уравновешивает силу тяжести кольца, и оно повисает в воздухе».

В том, что такое поведение кольца обусловлено именно индукционными токами, убедиться нетрудно. Для этого достаточно просто разрезать кольцо поперек — оно не будет висеть ни при каких условиях. Однако в приведенном объяснении есть два момента, на которые мы хотели бы обратить внимание. Во-первых, не ясно, какое именно сопротивление кольца — активное или индуктивное — играет решающую роль. Во-вторых, требует объяснения существование лишь одного положения равновесия кольца. Попытаемся разобраться в этих вопросах.

1. Покажем, что эффекта повисания кольца не было бы, если бы кольцо обладало только активным

сопротивлением. Проведем некоторые вычисления.

Сила Ампера, действующая на тонкое кольцо длиной l , по которому течет ток I , равна

$$F = B_r I l,$$

где B_r — горизонтальная проекция вектора магнитной индукции внешнего поля (рис. 1). Индукционный ток I определяется законом Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Здесь \mathcal{E} — электродвижущая сила индукции, R — активное сопротивление кольца. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока, взятой с противоположным знаком:

$$\mathcal{E} = -\Phi' = -(B_v S)'$$

(B_v — вертикальная проекция вектора магнитной индукции, S — площадь, ограниченная кольцом). Пусть магнитное поле изменяется по гармоническому закону с частотой ω , тогда

$$B_r = B_{rm} \cos \omega t,$$

$$B_v = B_{vm} \cos \omega t,$$

$$\mathcal{E} = -(B_v S)' = B_{vm} S \omega \sin \omega t,$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_{vm} S \omega}{R} \sin \omega t,$$

и

$$F = B_r I l = \frac{B_{rm} B_{vm} S \omega t}{2R} \sin 2\omega t,$$

где B_{rm} и B_{vm} — максимальные значения горизонтальной и вертикальной проекций вектора индукции.

Так как среднее за период значение синуса равно нулю, среднее значение силы Ампера тоже равно нулю. Следовательно, кольцо висеть не сможет.

Это противоречие устраниется, если предположить, что кольцо обладает не только активным, но и ин-

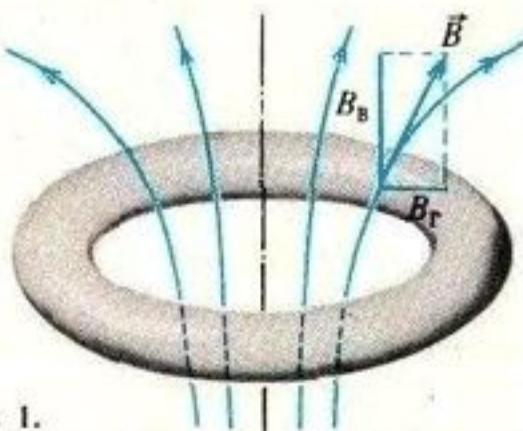


Рис. 1.

дуктивным сопротивлением тоже, которое и играет первостепенную роль. В таком случае ток в кольце будет изменяться со сдвигом по фазе относительно ЭДС, и для мгновенного значения силы Ампера получится другое выражение:

$$I = \frac{B_{\text{им}} S \omega}{Z} \sin(\omega t + \varphi),$$

и

$$F = B_r I l = \frac{B_{\text{им}} B_{\text{вн}} S \omega l}{Z} \cos \omega t \times \\ \times \sin(\omega t + \varphi) = \frac{B_{\text{им}} B_{\text{вн}} S \omega l}{2Z} \times \\ \times (\sin(2\omega t + \varphi) + \sin \varphi)$$

(здесь Z — полное сопротивление кольца, φ — сдвиг по фазе между током и электродвижущей силой). Среднее значение силы за период будет равно

$$F_{\text{ср}} = \frac{B_{\text{им}} B_{\text{вн}} S \omega l}{2Z} \sin \varphi,$$

что, безусловно, не равно нулю.

В наших опытах использовались кольца, изготовленные из нескольких слоев алюминиевой фольги общей толщиной около 1 мм. Внутренний радиус колец был равен 15 мм, а внешний — 30 мм. По оценкам на частоте 50 Гц активное сопротивление таких колец составляло миллионы, а индуктивное — десятки миллионов. При таких параметрах сила Ампера получалась порядка 10^{-2} Н, что вполне достаточно для удержания кольца массой в несколько граммов. Это и наблюдалось на опыте.

2. Почему же кольцо находится в равновесии только в одном положении, на одной определенной высоте? Ответ на этот вопрос мы получили из опыта.

В выражение для силы Ампера входят амплитудные значения вертикальной и горизонтальной проекций вектора магнитной индукции. Необходимо было выяснить, как эти значения изменяются с высотой.

Мы работали на установке, фотография которой представлена на рисунке 2. В катушку (ее внутренний радиус 10 мм, радиус щек 40 мм, высота 70 мм) с обмоткой из медного эмалированного провода (диаметром 1,2 мм) вставлен цилиндрический сердечник, набранный из железных стержней (длиной 200 мм, диаметром 2 мм). На катушку подавалось напряжение (100—120 В)

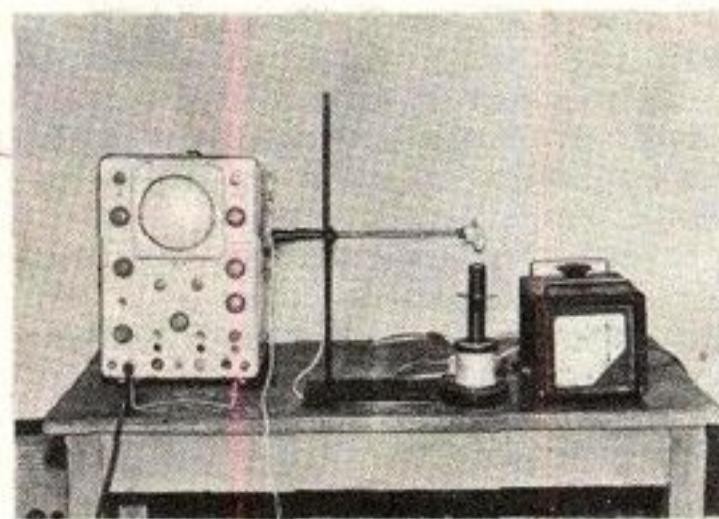


Рис. 2.



Рис. 3.

от лабораторного автотрансформатора. Нам удалось измерить вертикальную и горизонтальную проекции магнитного поля в непосредственной близости от сердечника на различных расстояниях от катушки. В качестве датчика мы использовали катушку (из 300 витков медного эмалированного провода диаметром 0,2 мм), в которой наводилась ЭДС индукции. Для измерения этой ЭДС катушка подключалась ко входу осциллографа.

Оказалось, что вертикальная проекция вектора магнитной индукции практически не меняется с высотой, а горизонтальная проекция изменяется так, как показано на рисунке 3. Здесь по оси абсцисс отложена высота H над катушкой (измеренная в сантиметрах), а по оси ординат — амплитудное значение $B_{\text{им}}$ горизонтальной проекции магнитного поля (в миллитесла). Полученный график и позволяет объяснить существование единственного положения устойчивого равновесия кольца.

Пусть кольцо имеет такую массу, что для компенсации силы тяжести, действующей на кольцо, необходима горизонтальная проекция поля, равная приблизительно 0,9 мТл. На графике лишь одна точка *A* соответствует этому значению; значит, кольцо повиснет на высоте 4 см над катушкой. Это положение равновесия устойчиво, так как при случайному опусканию кольца оно попадет в более сильное магнитное поле, сила Ампера увеличится и поднимет кольцо до прежней высоты.

А что, если для равновесия кольца потребуется горизонтальная проекция, равная приблизительно 0,75 мТл? Этому значению со-

ответствуют две точки на графике — *C* и *D*. Однако и в этом случае устойчивое равновесие только одно — в точке *C*, то есть на высоте 6 см над катушкой. А в точке *D* равновесие — неустойчивое. Действительно, если кольцо опустится чуть ниже высоты 11,5 см, сила Ампера уменьшится и не сможет уравновесить силу тяжести; следовательно, кольцо опустится еще ниже (до точки *C*).

Заметим, что опытным путем положение неустойчивого равновесия обнаружить довольно трудно. Это связано с наличием различных внешних воздействий, выводящих кольцо из этого положения.

Можно ли услышать рев мамонта?

(Начало см. на с. 20)

Леонид Мартынов, поэт, внимательно следивший за развитием физической науки, в такой форме отобразил соотношение скоростей звука и света:

Это почти неподвижности мука.
Мчаться куда-то со скоростью звука,
Зная прекрасно, что есть уже где-то
Некто,
Летящий
Со скоростью
Света!

А вот стихотворение Михаила Светлова «Голоса», наталкивающее на мысль, что человек со временем, благодаря космическим полетам, сможет услышать голоса ранее живших людей и животных:

И возможно, что за небосклоном
Он живет среди звездных миров —
Не записанный магнитофоном
Околевшего мамонта рев.
Мы — живущие вместе на свете —
Разгадали не все чудеса.
И бредут от планеты к планете
Крепостных мужиков голоса.
И быть может, на всех небосклонах
Повторяется снова сейчас
Несмолкающий шепот влюбленных
И густой Маяковского бас.

Пусть звезда не одна раскололась,
Но понятный и вечно живой
С хрипотцой Циолковского голос
Не замолк на волне звуковой.
С детства не был силен я в науке;
Не вступая с учеными в спор,
Я простер постаревшие руки
В нестареющий синий простор.

Небополнится голосами
Тех, кто жил и любил на Земле.

Если Светлов прав, то нетрудно рассчитать, с какой сверхзвуковой скоростью должен удаляться космонавт от Земли, чтобы, скажем, за десять лет полета догнать ушедшего в космос рев мамонтов. Как известно, мамонты исчезли примерно десять тысяч лет назад.

Дорогой читатель, сделай прикидку и оцени трудности запуска ракеты, летящей с соответствующей скоростью.

К сожалению, самокритика поэта, имеющаяся в данном стихотворении, не лишена оснований. Помня о пушкинской притче, не будем строги к поэту, но, все же, в чем основная физическая ошибка Светлова? Ответ на вопрос настолько прост, что не стоит присыпать его к нам в журнал. Подумайте о том, насколько усложнилась бы жизнь на Земле, если бы Светлов был прав.

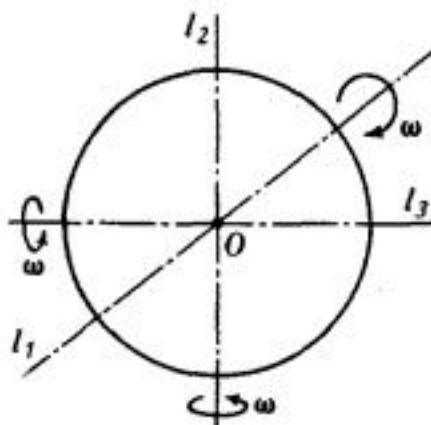


Рис. 4.

то есть

$$K_{l_1} = K_{l_2} + K_{l_3},$$

что и требовалось доказать.

Теперь вернемся к кольцу. Кинетическая энергия кольца, вращающегося вокруг своей оси (оси l_1 ; рис. 4), равна $K_{l_1} = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$

(кольцо однородно по массе и все его точки находятся на одном и том же расстоянии от оси l_1 , поэтому $\sum_i m_i r_i^2 = mr^2$). При вращении же вокруг осей l_2 и l_3 кинетические энергии, очевидно, одинаковы. Так что

$$K_{l_2} = K_{l_3} = \frac{K_{l_1}}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{4}.$$

Это и есть искомая кинетическая энергия.

8. а) Рассмотрим два многочлена степени p с целыми коэффициентами: многочлен $x(x+1)(x+2) \cdots (x+(p-1))$ и многочлен $x^p - x$. Первый многочлен, очевидно, делится на p при всех целых x , второй делится на p

при всех целых x согласно Малой теореме Ферма (см. с. 39 в «Кванте» № 1). Разность этих многочленов — многочлен с целыми коэффициентами степени меньше p , делящийся на p при всех целых x . Поэтому его коэффициенты делятся на p . Но эти коэффициенты — интересующие нас суммы.

б) Суммы $\sum_{1 < k_1 < k_2 < \dots < k_q < p-1} \prod_{i=1}^q k_i$ и $\sum_{1 < k_1 < k_2 < \dots < k_q < p-1} \prod_{i=1}^{q-1} (p-k_i)$ отличаются

только порядком слагаемых (если $k < p$, то $p-k=p$). Поэтому при нечетном q ($3 \leq q \leq p-2$)

$$\begin{aligned} S_q &= \sum_{1 < k_1 < k_2 < \dots < k_q < p-1} \prod_{i=1}^q k_i = \\ &= \sum_{1 < k_1 < k_2 < \dots < k_q < p-1} \prod_{i=1}^{q-1} (p-k_i) = \\ &= C_{p-1}^q p^q + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i C_{p-1-i}^{q-1} p^{q-i} S_i - S_q. \end{aligned}$$

то есть

$$2S_q = C_{p-1}^q p^q + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i C_{p-1-i}^{q-1} p^{q-i} S_i,$$

откуда, учитывая, что все S_i делятся на p , получаем, что S_q делится на p^2 .

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

Задание 1. 1. $\text{Ла}2!$ $\text{b}4$ 2. $\text{Ла}5!$ $\text{d}4$ 3. $\text{Kpd}7!$ $\text{Kр:f}6$ 4. $\text{C:d}4 \times$.

Задание 2. 1. $\text{e}8\text{C!}$ $\text{Kр:d}6$ 2. $\text{c}8\text{L!}$ **Креб** 3. $\text{Лc}6 \times$ (1... $\text{Kр:f}6$ 2. $\text{g}8\text{L!}$ **Креб** 3. $\text{Lg}6 \times$).

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. И. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фадеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:

М. Дубах, Г. Красников, Н. Кузьмина, С. Лухин, А. Пономарева, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

117071, Москва, Ленинский проспект, 15,

«Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21

Сдано в набор 18.2.82 Подписано в печать 25.3.82.

Печать офсетная

Бумага 70 × 108 1/16. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,02 Т-07857

Тираж 180 724 Цена 40 коп. Заказ 394

Ордена Трудового Красного Знамени

Чеховский полиграфический комбинат

ВО «Союзполиграфпром»

Государственный комитет СССР

по делам издательства, полиграфии

и книжной торговли

г. Чехов Московской области